1975 г.

ОБОБЩЕННЫЕ ОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ И СПОСОБЫ ИХ ФИКСАЦИИ

Для решения переопределенных систем уравнения в последнее время все чаще используются обобщенные обратные матрицы. Их применение обеспечивает получение решения для произвольной матрицы исходных уравнений.

В литературе существует большое количество различных определений обратных матриц. Целью данной работы было сравнение всех существующих определений обратных матриц, способов их фиксации. Отдельной целью данной работы было выявление геометрических особенностей обратных матриц, как самостоятельных объектов линейной алгебры.

Терминология и обозначения.

Будем рассматривать конечномерные векторные пространства над полем действительных чисел, для которых резервируем буквы E,F,L,K снабженные верхними или нижними индексами.

Размерность пространства E (число векторов пространства составляющих его базис) будем обозначать $\dim E$

Тот факт, что множество $F\subset E$ есть подпространство в E будем отмечать записью $F\triangleleft E$

Пусть $F\triangleleft E$ и $L\triangleleft E$, тогда если $F\cap L=\{0\}$ и $F+L=\{x+y \mid x\in F \text{ и } y\in L\}=E$, то E будет прямой суммой своих пространств F и L и это будет обозначаться $E=F\oplus L$

Пусть $F\triangleleft E$, тогда всякое L такое, что $F\oplus L=E$ будем называть прямым дополнением к F до E

Для того, чтобы $E=F\oplus L$, необходимо и достаточно, чтобы всякий вектор $x\in E$, был единственным образом представлен в виде $x = u + v$, где $u \in F$ и $v \in L$.

Для векторных пространств имеет место следующее предложение:

Для всякого подпространства $F \triangleleft E$ существует прямое дополнение L к F до E, то есть $\forall (F \triangleleft E) \exists (L \triangleleft E) [E = F \oplus L]$

В дальнейшем рассматривая конечномерные действительные векторные пространства, будем предполагать, что они эвклидовы, т.е. в них введено скалярное произведение, и более того, что они нормированы эвклидовой нормой, т.е. $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$

Если $(x,y)=0$, то x и y взаимно ортогональны и это обозначается $x \perp y$.

Пусть $E = F \oplus L$ и $F \perp L$, тогда будем говорить, что L ортогональное прямое дополнение к F до E , причем для всякого $F \triangle E$ имеет место единственное разложение $E = F \oplus {}^{\perp}F$, где

$${}^{\perp}F = \{ x \,/\, x \in E \text{ и } (x,y) = 0 \text{ для } \forall (y \in F) \}$$

В дальнейшем нас будет интересовать наилучшее приближение точки x в подпространстве F, то есть такое u^* , что

$$\|u^* - x\| = \min_{u \in F} \|u - x\|$$

Представим E в виде $E = F \oplus {}^{\perp}F$, тогда $x = u_x + v_x$,

где $u_x \in F, v_x \in {}^{\perp}F$.

Тогда $\|u - x\|^2 = \|u - u_x\|^2 + \|v_x\|^2$

Отсюда $u^* = u_x$

Пусть $f: E \to F$ линейное отображение векторного пространства E в векторное пространство F

Для всякого $y \in F$ обозначим его полный прообраз через $f^{-1}(y)$, т.е. $f^{-1}(y) = \{ x \,/\, x \in E \text{ и } f(x) = y \}$

Через $Im f$ обозначим множество $\{y / y = f(x), x \in E\}$ т.е. полный образ пространства Е при линейном отображении $f: E \longrightarrow F$. $Im f \triangleleft F$.

Множество $f^{-1}(0)$, т.е. полный прообраз нуля является подпространством в Е и имеет специальное обозначение $Ker f$ (ядро линейного отображения $f: E \longrightarrow F$)

$$Ker f = \{x / x \in E \text{ и } f(x) = 0\}$$

Если $Ker f = \{0\}$, то линейное отображение $f: E \longrightarrow F$ называется мономорфизмом и в этом случае различным векторам $x_1 \neq x_2$ соответствуют различные значения $f(x_1) \neq f(x_2)$

Если $Im f = F$, то линейное отображение $f: E \longrightarrow F$ называется эпиморфизмом.

В этом случае для всякого $y \in F$, $f^{-1}(y) \neq \theta$ и $f^{-1}(y) = Ker f + x$ где $f(x) = y$, то есть x любой конкретный прообраз вектора y.

Пусть $f: E \longrightarrow F$ произвольное линейное отображение и $E = Ker f \oplus L$, то для всякого $y \in Im f$, $f^{-1}(y) = Ker f + x_y$ где вектор $x_y \in f^{-1}(y) \cap L$ и следовательно определён однозначно вектором y.

(Пусть $x_1 = s_1 + t_1$ и $x_2 = s_2 + t_2$ таковы, что $f(x_1) = f(x_2) = y$, тогда $t_1 = t_2$. Действительно $x_1 - x_2 = s_1 - s_2 + t_1 - t_2$ и т.к. $x_1 - x_2 \in Ker f$ и $s_1 - s_2 \in Ker f$ то и $t_1 - t_2 \in Ker f$ но $t_1 - t_2 \in L$ и значит $t_1 = t_2$ ч.т.д.)

Если f - эпиморфизм и мономорфизм, то f - изоморфизм.

Далее рассмотрим так называемые арифметические эвклидовы пространства.

Арифметическим эвклидовым /или модельным/ пространством размерности n называется эвклидово пространство столбцов высоты n с выделенным базисом $\mathcal{E}^n = \{e_1^n, e_2^n, \dots, e_n^n\}$ где e_i^n - вектор - столбец высоты n, у которого все компоненты, кроме i-ой равной единице, равны нулю.

Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ два произвольных вектор - столбца из модельного пространства E^n, тогда скалярное произведение задается равенством $(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = x^* y$, если на x и y смотреть как на матрицы. Норма вектора-столбца x имеет вид $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x^* x}$

Пусть теперь A произвольная матрица размера $m \times n$

Тогда A индицирует линейное отображение $\varphi_A : E^n \to E^m$ заданное следующим образом $\varphi_A(x) = Ax$.

И наоборот, пусть $\varphi : E^n \longrightarrow E^m$ линейное отображение, тогда φ соответствует матрица A_φ этого линейного отображения относительно канонических базисов, то есть матрица $i^{ый}$ столбец которой есть вектор-столбец $\varphi(e_i^n)$.

Тогда на основании того, что $A_{\varphi_A} = A$ и $\varphi_{A_\varphi} = \varphi$ мы вполне обоснованно условимся не разичать матрицы и связанные с ними линейные отображения, модель$^{\text{ных}}$ пространства

Линейное отображение модельных пространств будем считать заданными, если оно задано как линейное отображение векторного пространства и представлено в матричной форме относительно канонического базиса. Последнее замечание вызвано с одной стороны прикладной спецификой статьи, то есть необходимостью все конечные результаты представлять в матричной форме, с другой стороны желание сохранить геометричность, присущую бескоординатной форме изложения. И поэтому, где это будет необходимо мы будем смотреть на матрицу A либо просто как на матрицу - объект алгебраических преобразований, либо как на линейное отображение модельных пространств также наиболее приспособленных к приложениям, либо как линейное отображение конечномерных векторных пространств без фиксации каких-либо базисов, видя в A лишь обозначение линейного отображения обладающего определенными геометрическими свойствами.

Для всякой матрицы A обозначим через $\rho_1(A)$ - количество строк, $\rho_2(A)$ количество столбцов матрицы.
Через $\rho(A)$ обозначим пару $(\rho_1(A), \rho_2(A))$ называемую размером матрицы A, через $r(A)$ - ранг матрицы A.

Тогда в этих обозначениях имеем следующие соотношения:

$$r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$$

$$r(A) \leq \min(\rho_1(A), \rho_2(A))$$

$$r(A) = \dim \operatorname{Im} A$$

$$\rho_2(A) = \dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Ker} A = r(A) + \dim \operatorname{Ker} A$$

Если $r(A) = \min(\rho_1(A), \rho_2(A))$, матрица называется невырожденной или матрицей полного ранга, в противном случае вырожденной или матрицей неполного ранга. При этом если $r(A) = \rho_1(A)$, то матрица A называется горизонтальной невыражденной, а линейное отображение $A : E^{\rho_2(A)} \longrightarrow E^{\rho_1(A)}$ будет эпиморфизмом и в этом случае $\operatorname{Im} A = E^{\rho_1(A)}$ и значит $\dim \operatorname{Ker} A = \rho_2(A) - \rho_1(A)$; если $r(A) = \rho_2(A)$, A называется вертикальной невыражденной матрицей, линейное отображение $A : E^{\rho_2(A)} \longrightarrow E^{\rho_1(A)}$ будет мономорфизмом и в этом случае $\dim \operatorname{Ker} A = 0$ т.е. $\operatorname{Ker} A = \{0\}$
если $r(A) = \rho_1(A) = \rho_2(A)$, то A - будет квадратной невыражденной матрицей, а линейное отображение $A : E^{\rho_2(A)} \longrightarrow E^{\rho_1(A)}$ будет изоморфизмом.

Пусть $E=F_1\oplus F_2$, тогда $\dim E=\dim F_1+\dim F_2$

если же $F_1 \lhd E$ и $F_2 \lhd E$, то $F_1+F_2 \lhd E$

и $\dim(F_1+F_2)=\dim F_1+\dim F_2-\dim(F_1\cap F_2)$

A^* - сопряженная /здесь транспонированная/ к A матрица;
$\rho(A^*)=(\rho_2(A),\rho_1(A))$

Пусть A произвольная матрица и $\rho(A)=(n,m)$,тогда $\operatorname{Im} A \perp \operatorname{Ker} A^*$. Действительно , $(Ax,y)=x^*A^*y=0$ где $x\in E^n$, $y\in \operatorname{Ker} A^*$. Аналогично , $\operatorname{Ker} A \perp \operatorname{Im} A^*$.

Если A -вертикальная невырожденная матрица, то $E^n=\operatorname{Im} A\oplus \operatorname{Ker} A^*$, если A -невырожденная горизонтальная, то
$E^m=\operatorname{Ker} A\oplus \operatorname{Im} A^*$

$y-At^- \ Ax+++$ A^tAx+A^t свобод разр. $A:R^n\longrightarrow R^n$ $y\in \operatorname{Ker} A^*$ $y-''$ $\mathbb{R}$ $A^*y=0$

Через $I_n:E^n\longrightarrow E^n$ обозначим тождественное линейное отображение модельных пространств , реализующее канонический изоморфизм, аналогичное линейное отображение для произвольных векторных пространств обозначим $id_F:F\longrightarrow F$. $id_F(x)=x$,
$I_n x=x$, т.е. I_n - единичная матрица

Пусть $E^n=F\oplus^{\perp}F$, тогда в F и $б^{\perp}F$ можно выбрать ортонормированные базисы таким образом, что их объединение будет ортонормированным базисом в E^n /но не обязательно коническим/.

Пусть $A:E^m\longrightarrow E^n$ произвольная вырожденная матрица, назовем матрицу $B:E^p\longrightarrow E^m$ порождающей для $\operatorname{Ker} A$, если $\operatorname{Im} B=\operatorname{Ker} A$. Ясно, что при этом $p\geq \dim \operatorname{Ker} A=r(B)=m-r(A)$
в этом случае E^p называется пространством параметризации $\operatorname{Ker} A$. Здесь матрица выступает в роли линейных отображений модельных пространств.

Если $p=\dim \operatorname{Ker} A$,т.е. B - будет мономорфизмом, то B носит название "матрицы фундаментальных решений" т.к. в этом случае столбы матрицы B образуют базис $Ker A$, т.е. являются линейно независимой системой решений уравнения $Ax=y$

Обозначим через $\mathcal{F}(A)$ множество всех порождающих $Ker A$ мономорфизмов B, тогда $\mathcal{F}(A)=\{X / AX=0$ и $\rho(X)=(m, m-r(A))$ и $r(X)=m-r(A)\}$ является также множеством всех матриц фундаментальных решений уравнения $Ax=0$.

В частности, обозначим через $G(A)$ матрицу фундаментальных решений уравнения $Ax=0$ полученную методом Гаусса, т.е. $G(A)\in\mathcal{F}(A)$.

Другой пример порождающей $Ker A$ матрицы B, не являющейся вообще говоря мономорфизмом, в явном виде дает следующая

Теорема I. Пусть A и C такие две матрицы, что $AC=A$ и $Ker A\subset Ker C$, тогда $Ker A = Im(I-C)$

Доказательство.

I. $Im(I-C)\subset Ker A$ Действительно

$$A(I-C)=A-AC=A-A=0$$

2. $Im(I-C)\supset Ker A$ Действительно, пусть $y\in Ker A$, тогда $y\in Ker C$ и значит $(I-C)y=y$ т.е. $y\in Im(I-C)$

Из /I/ и /2/ следует, что $Im(I-C)=Ker A$

Примечание: $A: E^m \longrightarrow E^n$ и $C: E^m \longrightarrow E^m$

Из теоремы I видно, что $B=I-C$ является порождающей для $Ker A$ и не является мономорфизмом, кроме случая когда $Ker A=E^m$

Если для всякой матрицы D обозначить матрицу, состоящую из линейно независимых столбцов матрицы D, расположенных в том ке порядке и полученных с помощью алгоритма исключения Гаусса, через $\gamma(D)$, то получим:

Следствие 1. $\gamma(I-C)\in\mathcal{F}(A)$, если A и C удовлетворяют условию теоремы 1.

Следствие 2. Пусть A и B такие матрицы, что $ABA=A$, тогда $Ker\,A = Im(I-BA)$ и $r(I-BA)=m-r(A)$

Доказательство

Действительно, $A(BA)=A$ и $Ker\,A\subset Ker\,BA$

$r(I-BA)=\dim Im(I-BA)=\dim Ker\,A = m-r(A)$

Очевидно, что $\gamma(I-BA)\in\mathcal{F}(A)$.

ОБОБЩЕННЫЕ ОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ И СПОСОБЫ ИХ ФИКСАЦИИ

Напомним известные определения обратных матриц

Определение I. Всякую матрицу B такую, что

/1/ $BA=I$ будем называть левой обратной к A

Определение 2. Всякую матрицу C такую, что

/2/ $AC=I$ будем называть правой обратной к A

Если для матрицы A существует левая обратная B и правая обратная C, то $B=C$ и тем самым определена единственная двусторонне обратная матрица $A^{-1}=B=C$ и называемая обратной к A

Для матрицы A существует левая обратная матрица тогда и только тогда, когда $\rho_1(A)\geq\rho_2(A)$ и $r(A)=\rho_2(A)$; другими словами, когда линейное отображение модельных пространств $A: E^{\rho_2(A)}\longrightarrow E^{\rho_1(A)}$ - мономорфизм.

Для матрицы A существует правая обратная, тогда и только тогда, когда $\rho_1(A)\leq\rho_2(A)$ и $r(A)=\rho_1(A)$; другими словами когда линейное отображение $A: E^{\rho_2(A)}\longrightarrow E^{\rho_1(A)}$ - эпиморфизм.

В случае, когда $r(A)<\min(\rho_1(A),\rho_2(A))$, для матрицы не существует обратной, левой обратной, правой обратной. Тем не менее для произвольных матриц A имеет смысл говорить о так называемых обобщенных обратных матрицах, которые в невырожденных случаях совпадает либо с левой обратной, либо с правой обратной, либо просто с обратной в зависимости от характера невырожденности.

Определение 3. Всякую матрицу D такую, что

/3/ $ADA=A$

/4/ $DAD=D$

будем называть обобщенной обратной к матрице A.

Из определения 3. непосредственно следует, что если матрица D будет обобщенной обратной к A, то матрица A в свою очередь будет обобщенной обратной к D.

Покажем, что для произвольной матрицы A всегда существует обобщенная обратная.

Пусть $\rho(A)=(n,m)$ и $r(A)=k\le\min(n,m)$

и пусть $F_1 \triangleleft E^m$ и $F_2 \triangleleft E^n$ такие, что (5) $E^m = \operatorname{Ker} A \oplus F_1$

и (6) $E^n = \operatorname{Im} A \oplus F_2$, т.е. F_1 и F_2 некоторые прямые дополнения к $\operatorname{Ker} A$ до E^m и к $\operatorname{Im} A$ до E^n соответственно.

Тогда всякий вектор $x\in E^m$ однозначно представим в виде $x=s_x+t_x$, где $s_x\in \operatorname{Ker} A$, а $t_x\in F_1$ и всякий вектор $y\in E^n$ однозначно представим в виде $y=u_y+v_y$, где $u_y\in \operatorname{Im} A$, $v_y\in F_2$

Но, тогда для u существует однозначно определенный вектор $t\in F_1$ такой, что $u=At$. Другими словами всякий вектор $y\in E^n$ однозначно представим в виде $y=At_y+v_y$, где $t_y\in F_1$ ~~$y=At_y+v_y$~~ и $v_y\in F_2$.

Положим $f(y)=t_y$. Тогда

1 f – корректно определенное отображение из E^n в E^m;

2. f – линейное отображение.

Далее имеем $\varphi_A\circ f\circ\varphi_A(x)=\varphi_A\circ f\circ\varphi_A(s+t)=\varphi_A(f(\varphi_A(t)))=$
$=\varphi_A(t)=\varphi_A(s+t)=\varphi_A(x)$;

$f\circ\varphi_A\circ f(y)=f\circ\varphi_A\circ f(\varphi_A(t_y)+v_y)=f(\varphi_A(t_y))=f(y)$

Обозначим через $A^+_{F_1F_2}$ матрицу линейного отображения f относительно канонических базисов ε^n и ε^m т.е. линейное отображение $A^+_{F_1F_2}: E^n\longrightarrow E^m$ модельных пространств.

Отсюда видно, что $AA^+_{F_1F_2}A=A$ и $A^+_{F_1F_2}AA^+_{F_1F_2}=$
$=A^+_{F_1F_2}$ т.е. что $A^+_{F_1F_2}$ обобщенная обратная к A матрица

То, что обобщенные матрицы есть корректное обобщение на случай произвольных матриц определения /1/ и /2/, показывают следующие предложения.

Предложение I. Пусть A вертикальная невырожденная матрица тогда условие (I) эквивалентно условиям /3/ и /4/.

Доказательство.

а/ Пусть имеет место условие /1/, т.е. $BA=I$ тогда $ABA=A$ и $BAB=B$.

б/ Пусть имеют место условия /3/ и /4/, т.е. $ADA=A$ и $DAD=$ тогда на основании теоремы 1 имеем $Jm(I-DA)=Ker\,A=\{$ т.к. А- мономорфизм и значит $I=DA$, что и требовалось доказать.

Предложение 2. Пусть A -горизонтальная невырожденная матрица, тогда условие /2/ эквивалентно условиям /3/ и /4/.

Доказательство:

а/ $/2/ \Longrightarrow /3/$ и $/4/$ тривиально

б/ Пусть имеют место соотношения /3/ и /4/, тогда на основании теоремы I имеем $Jm(I-AD)=Ker\,D.$

Но $Ker\,D=\{0\}$ т.к. D - мономорфизм.

$(\rho_1(D)=\rho_2(A)\geq\rho_2(D)=\rho_1(A)$ и $r(D)=\rho_2(D)=\rho_1(A))$

Значит $I=AD$

Ранее мы показали, что любая пара (F_1,F_2) такая, что $F_1\triangleleft E^m$ и $F_2\triangleleft E^n$ и $E^m=Ker\,A\oplus F_1$ и $E^n=Jm\,A\oplus F_2$ порождает обобщенную обратную к A матрицу $A^+_{F_1F_2}$. Теперь мы покажем обратное:

Теорема 2. Всякая обратная обобщенная матрица D порождает разложения

/7/ $E^m=Ker\,A\oplus Jm\,D$

/8/ $E^n=Jm\,A\oplus Ker\,D$

Доказательство:

Пусть имеют место /3/ и /4/.

Докажем /7/ Пусть $x \in E^m$, тогда $x=(I-DA)x+DAx = s_x+t_x$, где $s_x=(I-DA)x$ и $t_x=DAx$

Причем ясно, что $s_x \in Ker A$ на основании соотношения /3/ и $t_x \in Im D$.

С другой стороны $Ker A \cap Im D=\{0\}$. Действительно, пусть $x \in Ker A \cap Im D$ т.е. $Ax=0$ и $x=Dy$ для некоторого $y \in E^n$ тогда $DADy=DAx=0=Dy$ т.е. $x=0$. Таким образом $E^m=Ker A \oplus Im D$

Докажем /8/. Пусть $y \in E^n$, тогда $y=ADy+(I-AD)y=$ $=v_y+\vartheta_y$, где $v_y=ADy \in Im A$ и $\vartheta_y=(I-AD)y \in Ker D$ на основании /4/. С другой стороны $Im A \cap Ker D=\{0\}$ Действительно, пусть $y \in Im A \cap Ker D$, тогда $Dy=0$ и $y=Ax$ для некоторого $x \in E^m$, но тогда $ADAx=ADy=0=Ax$, откуда $y=0$. Таким образом $E^n=Im A \oplus Ker D$

Теорема 3. Всякая пара (F_1, F_2) где $F_1 \triangleleft E^m$ и $F_2 \triangleleft E$ такая, что имеют место разложения /5/ и /6/ однозначно определяют обобщенную обратную матрицу D такую, что $Ker D=F_2$ и $Im D=F_1$, при этом $D=A^+_{F_1F_2}$

Доказательство.

Пусть D - обобщенная обратная матрица к A такая, что $Im D=F_1$ и $Ker D=F_2$ покажем, что $D=A^+_{F_1F_2}$ Пусть $y \in E^n$, тогда $y=At_y+v_y$, где $t_y \in F_1=Im D$ и $v_y \in Ker D=F_2$. Отсюда $Dy=DAt_y$ и с другой стороны $A^+_{F_1F_2}y=t_y$. Следовательно $(A^+_{F_1F_2}-D)y=$ $=(I-DA)t_y$.

Но так как $t_y = DZ, z \in E^n$, имеем $(A^+_{F_1F_2} - D)y =$
$= (I - DA)DZ = DZ - DADZ = 0$,

что и требовалось доказать.

Обозначим через $\mathcal{D}_A$ множество всех обобщенных обратных матриц к A и через $\mathcal{F}_A$ множество пар прямых дополнений к $Ker A$ и $Im A$ до E^m и E^n соответственно.

Обозначим $Im D = F_1(D)$ и $Ker D = F_2(D)$ тогда соответствия

/9/ $D \longmapsto (F_1(D), F_2(D))$, где $D \in \mathcal{D}_A$

/10/ $(F_1, F_2) \longmapsto A^+_{F_1F_2}$, где $(F_1, F_2) \in \mathcal{F}_A$

реализует изоморфизм множеств $\mathcal{D}_A$ и $\mathcal{F}_A$.

Действительно с одной стороны мы имеем $A^+_{F_1(D)F_2(D)} = D$ на основании теоремы 2.

С другой стороны, очевидно, что $(F_1(A^+_{F_1F_2}), F_2(A^+_{F_1F_2})) = (F_1, F_2)$

Займемся теперь построением матрицы

Способ I. Пусть $\tau_1 = \{t^1_1, t^1_2, \cdots, t^1_k\}$ и $\tau_2 = \{t^2_1, t^2_2, \cdots, t^2_{n-k}\}$ соответственно Л.Н.З. системы векторов в F_1 и F_2 соответственно $F_1 = [t^1_1, t^1_2, \cdots, t^1_k]$ и $F_2 = [t^2_1, t^2_2, \cdots, t^2_{n-k}]$ /являются линейными оболочками систем векторов τ_1 и τ_2. /

Ясно, что векторы $At^1_1, At^1_2, \cdots, At^1_k$ образуют Л.Н.З. систему в $Im A$ поэтому л.н.з. система векторов $\{At^1_1, At^1_2 \cdots, A^1_k, t^2_1, t^2_2, \cdots, t^2_{n-k}\}$ образует базис /неканонический/ в E^n, который обозначим через β. Пусть $f: E^n \longrightarrow E^m$ построенное выше линейное отображение векторных пространств удовлетворяющее соотношениям $\varphi_A \circ f \circ \varphi_A = \varphi_A$ и $f \circ \varphi_A \circ f = f$. Тогда

$f(At^1_i) = t^1_i$, $i = 1, 2, \cdots, k$ и $f(t^2_i) = 0$ $i = 1, 2, \cdots, n-k$

по построению f и матрица линейного отображения f относи тельно базисов β и $\mathcal{E}^m$ будет иметь вид $T_1 P$, где T_1 матрица $i^{ый}$ столбец который есть вектор-столбец t_i^1, а P матрица

$$\begin{pmatrix} 1\,0 \dots 0\,0 \dots 0 \\ 0\,1 \dots 0\,0 \dots 0 \\ 0\,0 \dots 1\,0 \dots 0 \end{pmatrix} \quad \text{размера} \quad (k,n)$$

Для получения $A^+_{F_1 F_2}$, т.е. матрицы линейного отображения f относительно базисов $\mathcal{E}^n$ и $\mathcal{E}^m$, мы осуществим переход от базиса β к $\mathcal{E}^n$, что достигается умножением $T_1 P$ слева на матрицу перехода от базиса $\mathcal{E}^n$ к β. Так как матрица перехода от базиса β к $\mathcal{E}^n$ есть матрица (AT_1, T_2), где T_2 – матрица $i^{ый}$ столбец которой есть вектор-столбец t_i^2, то $A^+_{F_1 F_2} = T_1 P (AT_1, T_2)^{-1}$.

Для того, чтобы подчеркнуть, что фиксирующую роль здесь сыграли л.н.з. – системы τ_1 и τ_2 мы обозначим матрицу $T_1 P (AT_1, T_2)^{-1}$ через $A^+_{\tau_1,\tau_2}$.

Способ 2. Пусть $R_1 : E^k \longrightarrow E^m$ и $R_2 : E^n \longrightarrow E^k$ соответственно мономорфизм и эпиморфизм, такие что $\mathcal{J}m R_1 = F_1$ и $Ker R_2 = F_2$. Сначала покажем, что $R_2 A R_1$ невырожденная матрица. Пусть $x \in Ker R_2 A R_1$, т.е. $R_2 A R_1 x = 0$, тогда $AR_1 x \in Ker R_2 = F_2$, но $AR_1 x \in \mathcal{J}m A$ и значит $AR_1 x = 0$, т.е. $R_1 x \in Ker A$ и $R_1 x \in \mathcal{J}m R_1 = F_1$ т.е. $R_1 x = 0$ т.к. R_1 – мономорфизм, $x = 0$ и значит $Ker R_2 A R_1 = \{0\}$

С другой стороны пусть $y \in E^k$, тогда $y = R_2 u$ для некоторого $u \in E^n$ и значит $u = v + w$, где $v \in \mathcal{J}m A$ и $w \in F_2 = Ker R_2$, т.е. $y = R_2 v$, где $v \in \mathcal{J}m A$ т.е. $v = At$ для некоторого $t \in E^m$, но т.к. $t = s' + s$, где $s' \in Ker A$ и $s \in F_1$, то $v = As$. А т.к. $F_1 = \mathcal{J}m R_1$, то $s = R_1 x$ для некоторого $x \in E^k$.

Таким образом $y=R_2AR_1x$, т.е. $\mathrm{Im}\,R_2AR_1=E^k$ и R_2AR_1 эпиморфизм ~~R_2AR_1~~ и значит R_2AR_1 – невырожденная матрица.

Этот же результат вытекает из того, что R_2AR_1 – мономорфизм и из соображений размерности. ($R_2AR_1: E^k\to E^k$)

Покажем, что $A^+_{F_1F_2}=R_1(R_2AR_1)^{-1}R_2$.

Действительно, $\mathrm{Ker}\,R_1(R_2AR_1)^{-1}R_2=\mathrm{Ker}\,R_2=F_2$ и $\mathrm{Im}\,R_1(R_2AR_1)^{-1}R_2=\mathrm{Im}\,R_1=F_1$,

поэтому остается только показать, что выполнятся соотношения /3/ и /4/.

Проверим сначала /4/. Имеем $R_1(R_2AR_1)^{-1}R_2AR_1(R_2AR_1)^{-1}R_2=R_1(R_2AR_1)^{-1}R_2$

Для того, чтобы показать /3/ воспользуемся тем, что для всякой матрицы A определено скелетное разложение, т.е. представление матрицы $A=BC$ где B - вертикально невырожденная матрица /мономорфизм/, а C -горизонтально невырожденная /эпиморфизм/ при этом $r(B)=r(C)=k=\rho_2(B)=\rho_1(C)$

/11/ $\mathrm{Im}\,B=\mathrm{Im}\,A$

и /12/ $\mathrm{Ker}\,C=\mathrm{Ker}\,A$

$$\left(\begin{array}{l} B: E^k\longrightarrow E^n\\ C: E^m\longrightarrow E^k\end{array}\right)$$

Тогда $R_2AR_1=R_2BCR_1$, где $\det R_2B\neq 0$ и $\det CR_1\neq 0$

т.к. $\mathrm{Im}\,B\cap\mathrm{Ker}\,R_2=\{0\}$ и $\mathrm{Im}\,R_1\cap\mathrm{Ker}\,C=\{0\}$

Значит $(R_2AR_1)^{-1}=(CR_1)^{-1}(R_2B)^{-1}$ и $AR_1(R_2AR_1)^{-1}R_2A=BCR_1(C_1R_1)^{-1}(R_2B)^{-1}R_2BC=BC=A$

Для того, чтобы подчеркнуть, что фиксирующую роль здесь сыграли матрицы R_1 и R_2 будем $A^+_{F_1F_2}$ обозначать $A^+_{R_1R_2}$

Мы показали, что если $R_1: E^k\to E^m$ и $R_2: E^n\to E^k$ мономорфизм и эпиморфизм соответственно, такие что $E^m=\mathrm{Ker}\,A\oplus\mathrm{Im}\,R_1$ и $E^n=\mathrm{Im}\,A\oplus\mathrm{Ker}\,R_2$, то квадратная матрица R_2AR_1 - невырождена.

Верно и обратное, что есть, если R_1 и R_2 матрицы размеров (m,k) и (k,n) соответственно и такие, что R_2AR_1 - квадратная невырожденная матрица, то R_1 -мономорфизм, R_2 -эпиморфизм и $E^n = Im\,A \oplus Ker\,R_2$ и $E^m = Ker\,A \oplus Im\,R_1$.

Действительно, пусть R_2AR_1 -квадратная невырожденная матрица. Покажем, что $Ker\,A \cap Im\,R_1 = \{0\}$

Пусть $x \in Ker\,A \cap Im\,R_1$ т.е. $x = R_1t$ для некоторого $t \in E^k$ и $Ax = 0$. Тогда $AR_1t = 0$ и значит $R_2AR_1t = 0$, отсюда $t = 0$ и $x = 0$

Так как $r(R_2AR_1) = k \le min(r(R_2), r(A), r(R_1))$ то $k \le r(R_2) \le min(k,n) = k$ и $k \le r(R_1) \le min(m,k) = k$. и значит $r(R_2) = k = r(R_1)$, т.е. R_1 -мономорфизм и R_2 -эпиморфизм.

Так как $Ker\,A \oplus Im\,R_1 \triangleleft E^m$ и $dim(Ker\,A \oplus Im\,R_1) =$ $= m - k + k = m$, то $E^m = Ker\,A \oplus Im\,R_1$

Покажем, что $Im\,A \cap Ker\,R_2 = \{0\}$. Действительно, пусть $y \in Im\,A \cap Ker\,R_2$, то есть $y = At$ для некоторого $t \in E^m$ и $R_2y = 0$. Но $E^m = Ker\,A \oplus Im\,R_1$ и $t = s + R_1x$, $s \in Ker\,A$ и $x \in E^k$, значит $y = AR_1x$

Отсюда $R_2y = R_2AR_1x = 0$ и так как $x = 0$ то и $y = 0$. Далее имеем $dim(Im\,A \oplus Ker\,R_2) = k + n - k = n$, значит $E^n = Im\,A \oplus Ker\,R_2$

Определение 4. Пара (F_1, F_2) -такая, что $F_1 \triangleleft E^m$ и $F_2 \triangleleft E^n$ и $E^m = Ker\,A \oplus F_1$ и $E^n = Im\,A \oplus F_2$ называется дополняющей парой для A.

Таким образом предыдущими рассуждениями доказана.

Теорема 4. Для того, чтобы матрицы R_1 и R_2 размеров (m,k) и (k,n) соответственно были фиксирующими для некоторой обратной. к А. необходимо и достаточно выполнение любого из двух эквивалентных условий:

(i) $(\mathcal{J}m R_1, \mathcal{K}er R_2)$ — дополняющая пара для A.

(ii) $R_2 A R_1$ — невырожденная квадратная матрица

Рассмотрим теперь специальный случай фиксации, когда дополняющая пара (F_1, F_2) для A ортогональна, т.е. $F_1 = {}^{\perp}\mathcal{K}er A$ и $F_2 = {}^{\perp}\mathcal{J}m A$

Пусть $A=BC$ некоторое скелетное разложение для А. Тогда так как $\mathcal{J}m C^* = {}^{\perp}\mathcal{K}er C$ и $\mathcal{K}er B^* = {}^{\perp}\mathcal{J}m B$, то матрицы C^* и B^* определяют фиксацию обобщенной обратной матрицы $A^+_{C^*B^*} = C^*(B^*AC^*)^{-1}B^*$, которую мы будем называть ортогонализирующей обобщенной обратной или псевдообратной и обозначать A^+.

Рассмотрим приложение полученных результатов к решению уравнения $Ax=y$, где $x \in E^m$ и $y \in E^n$, и A — произвольная матрица размера (n,m) и ранга k. Из сказанного выше мы имеем разложения: $E^m = \mathcal{K}er A \oplus \mathcal{J}m A^+$ и $E^n = \mathcal{J}m A \oplus \mathcal{K}er A^+$, где $\mathcal{K}er A \perp \mathcal{J}m A^+$ и $\mathcal{J}m A \perp \mathcal{K}er A^+$. Поэтому y однозначно представимо в виде $y = u_y + v_y$, где $u_y \in \mathcal{J}m A$ и $v_y \in \mathcal{K}er A^+$.

В силу ортогональности разложения E^n $\|u_y - y\| = \min\limits_{x \in E^m} \|Ax - y\|$, то есть u_y — наилучшее среднеквадратичное приближение к y в $\mathcal{J}m A$. С другой стороны $A^{-1}(u_y) = \mathcal{K}er A + t_y$ где $t_y \in \mathcal{J}m A^+$ и из ортогональности соответствующего разложения E^m следует, что t_y самый короткий по норме вектор из $A^{-1}(u_y)$. Так как $t_y = A^+ y$ и $\mathcal{K}er A = \mathcal{J}m(I - A^+A)$ согласно следствию 2 из теоремы I, то окончательно получим

$$A^{-1}(u_y) = A^+ y + \mathcal{J}m(I - A^+A)$$

или в параметрической форме $A^{-1}(u_y) = \{x \mid x = A^+ y + (I - A^+A)t$, где $t \in E^m\}$.

Таким образом, если уравнение $Ax=y$ совместно, то есть $y\in \mathrm{Im}\,A$, то $\vartheta_y=0$ $u_y=y$ и $A^{-1}(y)=A^{+}y+\mathrm{Im}(I-A^{+}A)$

множество решений уравнения $Ax=y$, если же $Ax=y$ несовместно, то есть $y\notin \mathrm{Im}\,A$, то любой вектор из $A^{-1}(u_y)$ является решением задачи наилучшего приближения вектора y векторами Ax, где $x\in E^{m}$. Величина $\|\vartheta_y\|=\|y-u_y\|$ называется невязкой решения.

Если уравнение $Ax=y$ совместно, то его решения, то есть множества $A^{-1}(y)$ может быть задано явно при помощи любой обобщенной обратной к A матрицы D, а именно:

$A^{-1}(y)=Dy+\mathrm{Im}(I-DA)$. Больше того в случае совместности уравнения $Ax=y$ для выполнения этого равенства достаточно, чтобы матрица D удовлетворяла только условию $ADA=A$. Действительно в этом случае $\mathrm{Ker}\,A=\mathrm{Im}(I-DA)$ на основании следствия 2 теоремы I и $Dy\in A^{-1}(y)$ так как $y=At$ для некоторого $t\in E^{m}$ и значит $ADy=ADAt=At=y$.

Рассмотрим теперь, как следствия полученных результатов случаи, когда матрица A – мономорфизм и когда матрица A – эпиморфизм.

I. Пусть A – мономорфизм, т.е. вертикальная невырожденная матрица, тогда согласно теоремы 2 всякая обобщенная обратная матрица D будет левой обратной к A и наоборот. Причем D – будет в этом случае эпиморфизмом и $E^{n}=\mathrm{Im}\,A\oplus \mathrm{Ker}\,D$, $E^{m}=\mathrm{Im}\,D$.

Таким образом в этом случае дополняющая пара к A для всякой левой обратной матрицы D будет иметь вид $(E^{m},\mathrm{Ker}\,D)$ И наоборот всякая дополняющая пара вида (E^{m},F) определяет левую обратную к A матрицу $A^{+}_{E^{m}F}$, которую мы обозначим через ${}_F\bar{A}$. Ясно, что множество всех левых обратных к A матриц изоморфно множеству прямых дополнений к $Im A$ до E^n. При чем этот изоморфизм реализуется соответствиями

$$D \longmapsto F(D) = Ker D$$

$$F \longmapsto {}_F\bar{A}, \quad Ker\, {}_F\bar{A} = F.$$

Если выбрать фиксацию базисами, то ${}_F\bar{A} = A^{+}_{\tau_1 \tau_2}$, где $\tau_1 = \mathcal{E}^m$ и $\tau_2 = \tau = \{t_1, t_2, \dots, t_{n-m}\}$ – базис в F и тогда $T_1 = I_m$ и $T_2 = T$ и ${}_F\bar{A} = P(A,T)^{-1}$

где

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad и \quad \rho(P) = (m,n)$$

в этом случае для того чтобы подчеркнуть способ фиксации обозначим ${}_F\bar{A} = A^{+}_{\mathcal{E}^n \tau} = {}_\tau\bar{A}$

Если в качестве фиксирующего фактора взять порождающие дополняющую пару линейные отображения, $R_1 = I_m : E^m \longrightarrow E^m$ и $R_2 = R : E^n \longrightarrow E^m$, то ${}_F\bar{A} = A^{+}_{IR} = (RA)^{-1}R$.

Чтобы подчеркнуть способ фиксации обозначим матрицу $(RA)^{-1}R$ через ${}_R\bar{A}$.

Для того чтобы эпиморфизм $R : E^n \longrightarrow E^m$ был фиксирующим для некоторой левой обратной матрицы необходимо и достаточно, чтобы $E^n = Im A \oplus Ker R$, что в свою очередь эквивалентно $det\, RA \neq 0$.

Если $F \perp Im A$, то ${}_F\bar{A}$ обозначим через $\bar{A}$ и назовем левой ортогонализирующей обратной к A. $\bar{A} = (A^*A)^{-1}A^*$ так как A имеет тривиальное скелетное разложение $A = A I_m$

Если имеется уравнение $Ax = y$, где A – вертикальная невырожденная матрица, то $x^* = \bar{A}y$ обеспечивает наилучшее приближение к y элементами из $Im A$, а именно $Ax^* = A\bar{A}y$

является наилучшим приближением к y. В случае, если $Ax=y$ совместно, то $x^*=\bar{A}y$ является точным решением уравнения.

Для произвольной левой обратной к A матрицы D обозначим через $\mathcal{L}(D,A)$ множество всех осуществляющих фиксацию D матрицы (всех фиксирующих матриц) т.е. $\mathcal{L}(D,A)=\{R \mid D=\bar{_R A}=(RA)^{-1}R\}$

Тогда имеет место следующая теорема 5

$$\mathcal{L}(D,A)=\{R \mid R^* \in \mathcal{F}(I-D^*A^*)\}$$

Доказательство

I. Пусть $R\in\mathcal{L}(D,A)$, т.е. $D=(RA)^{-1}R$ отсюда $RAD=R$ или $R(AD-I)=0$ или $(I-D^*A^*)R^*=0$, где $r(R)=r(A)=m$, $\rho(R)=(m,n)$ и $\dim Ker(I_n-D^*A^*)=n-\dim Im(I-AD)=n-\dim Ker D=n-(n-m)=m$

так как $E^n=Ker(I_n-D^*A^*)\oplus Im(I_n-AD)=Ker(I_n-D^*A^*)\oplus Ker D$

Таким образом R^* является матрицей фундаментальных решений уравнения $(I-D^*A^*)x=0$, то есть $R^*\in\mathcal{F}(I-D^*A^*)$

2. Пусть $R^*\in\mathcal{F}(I-D^*A^*)$, тогда $r(R^*)=\dim Ker(I_n-D^*A^*)=m=r(R)=r(A)$, $\rho(R)=(m,n)$ и

$R(I_n-AD)=0$, отсюда $Im(I_n-AD)=Ker D\subset Ker R$

но так как $\dim Ker D=\dim Ker R=\cdots$, то $Ker D=Ker R$

и значит R - фиксирующий D -эпиморфизм, то есть $R\in\mathcal{L}(D,A)$

Из /I/ и /2/ следует, что

$$\mathcal{L}(D,A)=\{R \mid R^*\in\mathcal{F}(I-D^*A^*)\}$$

2. Пусть A -горизонтально невырожденная матрица, т.е. A -эпиморфизм, тогда согласно теореме I всякая обобщенная к A обратная матрица будет левой обратной и наоборот. В этом случае D будет мономорфизмом и $E^m=Ker A\oplus Im D$ и $E^n=Im A\oplus\{0\}$

В этом случае дополняющими к A парами будут пары $(F_i;\{0\})$, где F прямое дополнение к $Ker A$ до E^m.

Обозначим $A^+_{F\{0\}} = A^-_F$. Ясно, что множество всех правых обратных к A матриц изоморфно множеству прямых дополнений к $Ker A$ до E^m.

При чем этот изоморфизм реализуется соответствием

$$D \longmapsto F(D) = Im D$$

$$F \longmapsto A^-_F, \quad Im A^-_F = Im D$$

В данном случае фиксация базисами и линейными отображениями приводит к одному и тому представлению матрицы A^-_F, а именно пусть $\tau_1 = \tau$ базис в $F_1 = F$, так как $F_2 = \{0\}$, то τ_2 пустое семейство векторов. Тогда $T_1 = T$ и T_2 – пустая матрица, то есть $(AT_1, T_2) = AT$. Матрица $P = I_m$ и значит $A^+_{\tau\tau} = T(AT)^{-1}$. Если в качестве фиксирующего фактора взять порождающие дополняющую пару $(F, \{0\})$ линейные отображения мономорфизм $R_1 : E^n \longrightarrow E^m$ и эпиморфизм $R_2 : E^n \longrightarrow E^n$, такие, что $Im R_1 = F$ и $Ker R_2 = \{0\}$ /последнее выполняется автоматически так как R_2 -эпиморфизм /, то $det R_2 \neq 0$ и тогда $A^+_{R_1 R_2} = R_1 (R_2 A R_1)^{-1} R_2 = R_1 (AR_1)^{-1} R_2^{-1} R_2 = R_1 (AR_1)^{-1}$.

Обозначим R_1 просто через R, а $A^+_{R_1 R_2}$ через A^-_R подчеркивая этим самым способ фиксации. Тогда $A^-_R = R(AR)^{-1}$.

Для того, чтобы мономорфизм $R : E^n \longrightarrow E^m$ был фиксирующим для некоторой обратной матрицы необходимо и достаточно, чтобы $E^m = Ker A \oplus Im R$, что в свою очередь эквивалентно $det(AR) \neq 0$.

Если $F \perp Ker A$, то A^-_F обозначим через A^- и будем называть ортогонализирующей правой обратной к A. $A^- = A^*(AA^*)^{-1}$ т.к. A имеет тривиальное скелетное разложение $A = I_m \cdot A$.

Если имеется уравнение $Ax = y$, так как A -горизонтально невырождена, то $y \in \operatorname{Im} A$, т.е. уравнение всегда совместно. Тогда множество решений $A^{-1}(y)$ имеет вид $A^{-1}(y) = A^{-}y + \operatorname{Im}(I - A^{-}A)$, где $A^{-}y$ самый короткий по норме вектор являющийся решением уравнения $Ax = y$.

Пусть D произвольная правая обратная к A матрица. Обозначим через $\mathcal{R}(A,D)$ множество всех матриц фиксирующих D. Тогда имеет место аналогическая теореме 5 теорема 6

$$\mathcal{R}(A,D) = \mathcal{F}(I - DA)$$

Доказательство

Так как D – правая обратная к A, то D^* левая обратная к A^* и наоборот.

Значит $\mathcal{R}(A,D) = \{R / R^* \in \mathcal{L}(D^*, A^*)\}$. Но $\mathcal{L}(D^*, A^*) = \{R / R^* \in \mathcal{F}(I - DA)\}$.

Отсюда $\mathcal{R}(A,D) = \{R / R \in \mathcal{F}(I - DA)\} = \mathcal{F}(I - DA)$.

Пусть $A = BC$ скелетное разложение произвольной матрицы A, тогда B – мономорфизм, C – эпиморфизм и $A^+_{R_1,R_2} = C^{-}_{R_1} \cdot {}^{-}_{R_2}B$

В частности $A^+ = C^{-} \cdot {}^{-}B$ и так как $C^{-} = ({}^{-}(C^*))^*$ имеем $A^+ = ({}^{-}(C^*))^* \cdot {}^{-}B$, то есть вычисление A^+ сводится к нахождению ортогонализирующих левых обратных.

Если обозначить через B любую невырожденную вертикальную матрицу размера (n,k), где $k = r(A)$ и такую, что $\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} A$, то положив $C = DA$ где $DB = I$ имеем скелетное разложение $A = BC$. Так как уравнение $BC = A$ совместно и относительно C имеет решение DA, где D любая левая обратная к B матрица. В частности положив $C = {}^{-}BA$ имеем скелетное разложение $A = B \cdot {}^{-}BA$

Как было нетрудно заметить, для решения совместного уравнения $Ax = y$ в случае произвольной матрицы A, достаточно иметь произвольную матрицу D удовлетворяющей только соотношению $ADA = A$

а не соотношениям /3/ и /4/, определяющим обобщенные матрицы. Исходя из этих соображений Рао [ ] определил обобщенные обратные матрицы к A, как матрицы удовлетворяющие соотношению $ADA=A$. Такие матрицы в отличие от обобщенных обратных по определению 3 назовем $\mathcal{R}$ - обобщенными обратными к A

Пенроуз, наоборот, рассматривает в качестве матриц обобщенных обратных к A, матрицы, удовлетворяющие еще двум дополнительным к /3/ и /4/ соотношениям

(13) $(AD)^*=AD$

(14) $(DA)^*=DA$

Такие матрицы в отличие от обобщенных обратных по определению /3/ назовем $\mathcal{P}$ -обобщенными. Как показал Пенроуз для каждой матрицы A существует единственная $\mathcal{P}$ - обобщенная обратная матрица.

$\mathcal{R}$ и $\mathcal{P}$ - обобщенные обратные матрицы образуют как бы два полюса между которыми расположены обобщенные обратные матрицы и так называемые слабо обобщенные матрицы, ~~и так называемые слабо обобщенные матрицы~~ / /, которые варьируются одним из двух условий (13) и (14), а именно назовем $\mathcal{P}_1$ - обобщенной обратной матрицей к A, любую матрицу D удовлетворяющей соотношениям (3), (4), (13), и $\mathcal{P}_2$ - обобщенной обратной матрицей к A, любую матрицу D удовлетворяющей соотношениям (3), (4), (14). Ясно, если матрица D является одновременно $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$-обобщенной обратной к A, то D -будет $\mathcal{P}$ - обобщенной обратной к A.

Приведем сравнительный анализ этих пяти вариантов обобщенных обратных матриц.

Теорема 7. Пусть A - произвольная вырожденная матрица, тогда для всякого ℓ, такого, что $r(A) < \ell \le \min(\rho_1(A), \rho_2(A))$

существует $\mathcal{R}$ -обобщенная обратная к A матрица D ранга l.

Доказательство

Пусть A - матрица удовлетворяющая условиям теоремы, т.е. $\rho(A)=(n,m)$ и $z(A)=k<\min(n,m)$.

Пусть $F_1, F_2, F_3 \lhd E^m$ и $L_1, L_2, L_3 \lhd E^n$ такие что $E^m=F_1\oplus F_2\oplus F_3$ и $E^n=L_1\oplus L_2\oplus L_3$, где $F_1\oplus F_2=\operatorname{Ker}A$, $L_1=\operatorname{Im}A$, $\dim F_2=\dim L_2=l-k>0$.

Тогда $\dim L_3=n-l\geq 0$, $\dim F_3=k$, $\dim F_1=n-l$

Такие разложения E^m и E^n в прямую сумму всегда можно осуществить.

И пусть $g: L_2\longrightarrow F_2$ некоторый произвольно заданный изоморфизм векторных пространств. Тогда всякий вектор $y\in E^n$ однозначно представим в виде $y=u_y+v_y+w_y$, где $u_y\in L_1, v_y\in L_2, w_y\in L_3$.

~~всякий вектор однозначно представим в виде~~

~~где~~ . Но так как $L_1=\operatorname{Im}A$, то $u_y=Ax$ для некоторого $x\in A^{-1}(u_y)=\operatorname{Ker}A+s_y$, где $s_y\in F_3\cap A^{-1}(v_y)$ определен однозначно вектором u_y.

Таким образом для всякого $y\in E^n$ $u_y=As_y$, где $s_y\in F_3$ определен однозначно вектором y. Определим теперь линейное отображение $f: E^n\longrightarrow E^m$, задав его на компонентах разложения E^n ~~на компоненты разложения~~ в прямую сумму, а именно положим $f(y)=f(As_y+v_y+w_y)=f(As_y)+f(v_y)+f(w_y)=s_y+g(v_y)+0=s_y+g(v_y)$, т.е. $f(As_y)=s_y\in F_1$, $f(v_y)=g(v_y)\in F_2$ и $f(w)=0$.

Ясно, что $\operatorname{Ker}f=L_3$ и $\operatorname{Im}f=F_2\oplus F_3$.

Далее имеем $\varphi_A\circ f\circ\varphi_A=\varphi_A$ так как $\varphi_A\circ f\circ\varphi_A(x)=$
$=\varphi_A(f(\varphi_A(p_x+t_x+s_x)))=\varphi_A(f(\varphi_A(s_x)))=\varphi_A(f(As_x))=$
$=\varphi_A(s_x)=\varphi_A(x)$, где $p_x\in F_1$, $t_x\in F_2$, $s_x\in F_3$.

Обозначим через D матрицу линейного отображения f относительно базисов E^n и E^m, тогда $r(D)=l$, $ADA=A$, $Ker D = L_3 \stackrel{def}{=} L$ и $Im D = F_2 \oplus F_3 \stackrel{def}{=} F$. При этом $Ker A \cap Im D = F_2 \neq \{0\}$, $Im A \cap Ker D = \{0\}$, $E^m = Ker A + Im D$ (не прямая сумма). $Im A \oplus Ker D \triangleleft E^n$ и $Im A \oplus Ker D = E^n$ в том и только в том случае, когда $l = n < m$.

Таким образом теорема доказана.

Из теоремы видно, что фиксация $F \triangleleft E^m$ и $L \triangleleft E^n$ как „apriory" образа и ядра некоторой R - обобщенной обратной матрицы, не обеспечивает однозначного определения этой матрицы, которая на самом деле зависит от выбора $F_1, F_2, F_3, L_1, L_2, L_3$ и g удовлетворяющих приведенным выше условиям.

Теорема 8. Следующие три условия эквивалентны:

Не переводить (тривиальный, глоб. случай, замеч)

(i) $ADA=A$ и $r(A)=r(D)$

(ii) $ADA=A$ и $DAD=D$

(iii) $DAD=D$ и $r(D)=r(A)$

Доказательство

Достаточно доказать эквивалентность $(i) \Longleftrightarrow (ii)$ так как эквивалентность $(ii) \Longleftrightarrow (iii)$ следует автоматически из $(i) \Longleftrightarrow (ii)$

1. Покажем сначала $(ii) \Longrightarrow (i)$

Из $ADA=A$ следует $r(D) \geq r(A)$, из $DAD=D$ следует $r(A) \geq r(D)$

Отсюда $r(A)=r(D)$ и следовательно $(ii) \Longrightarrow (i)$ и (iii)

2. Покажем $(i) \Longrightarrow (ii)$

Так как $Im A \cap Ker D = \{0\}$ $(y = Ax$ и $Dy=0 \Longrightarrow DAx=0 \Longrightarrow ADAx = Ax = y = 0)$, то $Im A + Ker D = Im A \oplus Ker D \triangleleft E^n$.

Но $\dim(Im A \oplus Ker D) = \dim Im A + \dim Ker D = k+n-k = n$ и значит $E^n = Im A \oplus Ker D$ т.е. всякий вектор $y \in E^n$ однозначно

представим в виде $y = u_y + v_y$, где $u_y \in \operatorname{Im} A$ и $v_y \in \operatorname{Ker} D$.
Поэтому имеем $DADy = DADu_y$, но $u_y = Ax$ для некоторого $x \in E^m$
поэтому $DADy = DADAx = DAx = Du_y = Dy$, т.е. $DAD=D$, что и требовалось доказать.

Таким образом множество обобщенных обратных к А матриц в точности совпадает с подмножеством $\mathcal{R}$ — обобщенных обратных к A матриц, ранг которых равен $r(A)$ и если матрица A — вырождена это подмножество будет собственным.

Примечание!

[illegible] то-есть

[illegible]

Еще мы видим, что в отличие от обобщенных обратных матриц, ядро и образ $\mathcal{R}$ - обобщенной обратной матрицы в общем случае не характеризует её однозначно. И наконец, определение $\mathcal{R}$ — обобщенных обратных матриц не симметрично, то есть отношение " быть $\mathcal{R}$ - обобщенной обратной к A " не симметрично за исключением случая рассмотренного в теореме 8, в то время как обобщенные обратные матрицы наследуют это свойство обычных обратных матриц.

Рассмотрим теперь $\overleftarrow{P_1}$ и $\overrightarrow{P_2}$ — обобщенные обратные матрицы.

Теорема 9. Множество $\overleftarrow{P_1}$ - обобщенных обратных матриц к A в точности совпадает с множеством обратных матриц к A вида $A^+_{F_1 F_2}$, где (F_1, F_2) произвольная дополняющая пара такая, что $F_2 = {}^{\perp}\operatorname{Im} A$, то есть с множеством матриц вида $A^+_{RB^*}$, где $\det(CR) \neq 0$ и $A = BC$ скелетное разложение.

Доказательство:

Имеем $E^n = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} D$, но $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} AD$ и $\operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker} AD = \operatorname{Ker}(AD)^*$ на основании соотношений (3), (4) и (13). Так как $\operatorname{Im} AD \perp \operatorname{Ker}(AD)^*$, то $\operatorname{Ker} D = {}^{\perp}\operatorname{Im} A$. С другой стороны $\operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker} B^*$, так как $Ker B^* = {}^{\perp}Im B = {}^{\perp}Im A$. Отсюда $D = R(B^*AR)^{-1}B^* = A^+_{RB^*}$

Аналогично имеет место

Теорема 10. Множество всех $\mathcal{P}_2$ - обобщенных обратных матриц к A в точности совпадает с множеством всех обобщенных обратных матриц к A вида $A^+_{C^*R}$, где $\det(RB) \neq 0$ и $A = BC$ скелетное разложение матрицы A.

Доказательство

Имеем $E^m = Ker A \oplus Im D$, но $Ker A = Ker DA = Ker (DA)^*$ и $Im D = Im DA$ на основании соотношений (3), (4), (14) (2). Так как $Ker (DA)^* \perp Im DA$, то $Im D = {}^{\perp}Ker A$ с другой стороны $Ker A = Ker C$ и $Im C^* = {}^{\perp}Ker C$, то есть $Im D = Im C^*$. Отсюда $D = C^*(RAC^*)^{-1}R = A^+_{C^*R}$.

Примечание 1. $Im A = Im AD$, т.к. $E^m = Ker A \oplus Im D$; $Ker D = Ker AD$, так как $Ker D = Im (I - AD) = Ker AD$ так как $((AD)^2 = AD)$

Примечание 2. $Im D = Im DA$, так как $E^n = Im A \oplus Ker D$; $Ker A = Ker DA$, так как $Ker A = Im(I - DA) = Ker DA$. $((DA)^2 = DA)$.

И наконец, если D есть $\mathcal{P}$ - обобщенная обратная матрица, то из теорем 9 и 10 следует, что $D = A^+_{{}^{\perp}Ker A, {}^{\perp}Im A} = A^+_{C^*B^*}$ т.е. теорема Пенроуза.

Таким образом условия Пенроуза поставляя наиболее важный в приложениях вид обобщенных матриц и будучи симметричными, являются слишком жесткими, так как определяют единственную обобщенную матрицу, в то время, как в приложениях очень часто встречаются обобщенные матрицы вообще говоря произвольно фиксированные. В частности далее мы увидим какую роль могут сыграть обобщенные обратные матрицы к A фиксированные ортогонально.

Рассмотрим теперь вопрос об обращении матриц разбитых на блоки.

Пусть A - произвольная матрица разбитая на два вертикальных блока, т.е. $A=(A_1,A_2)$. Пусть $A=BC$ скелетное разложение, тогда разбиение (A_1,A_2) индуцирует разбиение $B=(B_1,B_2)$ и $C=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$

За счет этого вопрос об обращении матрицы A разбитой на блоки редуцируется к обращению вертикальных и горизонтальных невырожденных матриц разбитых на блоки.

Примечание: если $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$, то для скелетного разложения индуцируется разбиение $B=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}$ и $C=(C_1,C_2)$

Рассмотрим подробно случай вертикальной невырожденной матрицы.

Пусть A -вертикальная невырожденная матрица, пусть R некоторая фиксирующая матрица и пусть $A=(A_1,A_2)$ - разбита на вертикальные блоки.

Рассмотрим следующую задачу фиксации блоков.

Найти такие фиксирующие матрицы R_1 и R_2 для A_1 и A_2 такие, чтобы

$$_{R}\overset{-}{A}=\begin{pmatrix}_{R_1}\overset{-}{A}\\ _{R_2}\overset{-}{A}\end{pmatrix}$$

Напомним сначала следующую теорему Беркамера [ ]

Теорема. Пусть A - квадратная невырожденная матрица и $A=(A_1,A_2)$, тогда $A^{-1}=\begin{pmatrix}_{R_1}\overset{-}{A}_1\\ _{R_2}\overset{-}{A}_1\end{pmatrix}$,

где $R_1^*\in\mathcal{F}(A_2^*)$ и $R_2^*\in\mathcal{F}(A_1^*)$.

Теорема II. Пусть $A=(A_1,A_2)$ произвольная вертикальная невырожденная матрица и $_{R}\overset{-}{A}$ обратная слева к A, тогда $_{R}\overset{-}{A}=\begin{pmatrix}_{R_1}\overset{-}{A}_1\\ _{R_2}\overset{-}{A}_1\end{pmatrix}$, где $R_1=X_1R$ и $R_2=X_2R$ и $X_1^*\in\mathcal{F}((RA_2)^*)$, $X_2^*\in\mathcal{F}((RA_1)^*)$.

Доказательство

Имеем $_{R}\overset{-}{A}=(RA)^{-1}R$, но $RA=(RA_1,RA_2)$ и по теореме Беркамера $(RA)^{-1}=\begin{pmatrix}_{X_1}\overset{-}{(RA_1)}\\ _{X_2}\overset{-}{(RA_2)}\end{pmatrix}$, где: $X_1^* \in \mathcal{F}((RA_2)^*)$ и $X_2^* \in \mathcal{F}((RA_1)^*)$.

отсюда $_R\bar{A} = (RA)^{-1}R = \begin{pmatrix} \bar{_{X_1}(RA_1)}R \\ \bar{_{X_2}(RA_2)}R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X_1RA_1)^{-1}X_1R \\ (X_2RA_2)^{-1}X_2R \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} _{R_1}\bar{A}_1 \\ _{R_2}\bar{A}_2 \end{pmatrix}$, где $R_1 = X_1R$ и $R_2 = X_2R$, ч.т.д.

Пусть теперь A -горизонтальная невырожденная матрица. Имеет место теорема 12. Пусть $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ и $\bar{A}_R$ правая обратная к A, тогда $\bar{A}_R = ((\bar{A_1})_{R_1}, (\bar{A_2})_{R_2})$, где $R_1 = RX_1$ и $R_2 = RX_2$ где $X_1 \in \mathcal{F}(A_2R)$, $X_2 \in \mathcal{F}(A_1R)$.

Доказательство получается транспонированием теоремы II.

Следствие I.

Пусть A -вертикальная невырожденная матрица и $A = (A_1, A_2)$ тогда $\bar{A} = \begin{pmatrix} _{R_1}\bar{A}_1 \\ _{R_2}\bar{A}_2 \end{pmatrix}$, где $R_1 = X_1A^*$, $R_2 = X_2A^*$

и $X_1^* \in \mathcal{F}(A_2^*A)$, $X_2^* \in \mathcal{F}(A_1^*A)$

Следствие 2. Пусть A - горизонтальная невырожденная матрица и $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$

тогда $\bar{A} = ((\bar{A_1})_{R_1}, (\bar{A_2})_{R_2})$, где $R_1 = A^*X_1$, $R_2 = A^*X_2$ и $X_1 \in \mathcal{F}(A_2A^*)$, $X_2 \in \mathcal{F}(A_1A^*)$.

Уважаемый Аркадий Маркович!

Тысячу раз извиняюсь за задержку Вашей статьи — я действительно оказался в исключительно глубоком цейтноте, из которого не выбрался и по сей день.

Статью Вашу я прочитал. Она производит весьма благоприятное впечатление и новизной, и глубиной подхода к построению и анализу псевдообращений. Я мог бы сделать ряд частных замечаний по статье, но мне кажется, что она является пока не окончательным вариантом, и Вы над ней ещё будете работать (пока она выглядит заметно растянутой и несколько рыхловатой).

Весьма приятно, что Вы делаете распространение на преобразования в произвольных пространствах. Очень интересно было бы более смело войти с этим вопросом в гильбертовы пространства.

Дело в том, что, как мне кажется, теория псевдообращений может иметь прямую связь с методами А.Н. Тихонова решения некорректных задач (см. А.Н. Тихонов и В.А. Арсенин „Методы решения некорректных задач". М. „Наука" 1974г.), а наиболее ~~интере эти задачи~~ интересные некорректные задачи возникают при решении линейных уравнений в гильбертовых пространствах.

2 февраля 1976г. Дородн[illegible]